TD 6 - Electromagnétisme

Propagation et réflexion des ondes électromagnétiques avec des milieux conducteurs

Questions de cours

Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

1. Montrer que sous certaines conditions (à préciser), on peut considérer un conducteur ohmique localement neutre et on peut négliger les courants de déplacement devant les courants libre.
2. Etablir les équations de propagation dans un conducteur ohmique.
3. Etablir la relation de dispersion dans un milieu ohmique. Interpréter l'expression de la grandeur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
4. Établir l'expression de l'onde réfléchie (pour $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$) sur un conducteur parfait en exploitant les relations de passage fournies pour une onde incidente (OPPH polarisée rectiligement) donnée.
5. En déduire les courants surfaciques apparaissant sur le conducteur parfait.
6. Définir une onde stationnaire. Déterminer les distances entre deux ventres consécutifs, deux noeuds consécutifs et un ventre et un noeud consécutifs.
7. Établir la condition de quantification des solutions dans une cavité résonante.

Exercice de cours - Savoir-Faire

SF 1 - Coefficient de réflexion énergétique

On désire étudier la réflexion d'une onde plane progressive harmonique sur un conducteur parfait de manière énergétique.

1. Avec les conventions adoptées en cours, calculer le vecteur de Poynting moyen de l'onde incidente, puis celui de l'onde réfléchie.
2. Calculer le rapport R de leurs normes et interpréter. Ce rapport est nommé coefficient de réflexion en énergie.

Exercice phare

Exercice 1 - Guide d'ondes

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$, est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = f(x)e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_y}$$

1. Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k.
2. Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c à exprimer.
3. On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, possédant plusieurs modes propagatifs ?
4. Le champ magnétique dans le guide s'écrit

$$\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = -\frac{k}{\omega}E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_x} + i\frac{n\pi}{a\omega}E_0\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_z}.$$

   Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.

Exercices en plus

Exercice 2 - Blocage d'appel

Très proche du cours

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : ce dernier ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

1. Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.
3. Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$, avec $\underline{k}$ complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?
4. Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience.

Exercice 3 - Onde électromagnétique confinée

Exercice très proche du cours

On rappelle que les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{1\to 2}} \qquad \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}} \qquad \mu_0 \overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{n_{1\to 2}} \wedge (\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})$$

où σ et $\overrightarrow{j_s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1. On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\overrightarrow{\underline{E_i}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{e_x}$. Montrer que $\omega = kc$.
2. On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour $\overrightarrow{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.
3. En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.
4. Qu'impliquent les relations de passage pour $\overrightarrow{B}$? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

5. Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.
6. Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = cste$?

Exercice 4 - Voile solaire

Exercice très classique qui était phare

Une voile solaire est un dispositif de propulsion permettant de se déplacer dans l'espace à la manière d'un voilier. Les photons émis par le Soleil entrent en collision avec la voile et lui cèdent leur quantité de mouvement, ce qui lui permet d'avancer. Compte tenu de la faible propulsion générée, le procédé ne permet pas de quitter la surface d'une planète (même dénuée d'atmosphère, et donc de friction). Il est en revanche utilisable sur un appareil ayant déjà atteint la vitesse de satellisation minimale, voire la vitesse de libération. Plusieurs prototypes de petite taille ont déjà été placés en orbite ou sont en cours de développement.

On considère une voile solaire de surface S modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de polarisation rectiligne. On suppose que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPM.

1. Proposer une expression du champ électrique complexe de l'OPPM incidente sur la voile. En déduire l'onde réfléchie.
2. Calculer la densité surfacique de courant sur la voile.
3. Proposer une expression pour la force surfacique moyenne à laquelle est soumise la voile et la calculer. Commenter sa direction et son sens.

Données :

- les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait ;
- relations de passage à l'interface entre deux milieux (1) et (2), de normale $\overrightarrow{n}$ orientée de (1) vers (2) :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n} \qquad \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n} \qquad \mu_0 \overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})$$

  où σ et $\overrightarrow{j_s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Exercice 5 - Communication avec un satellite

Vers les plasmas : proche des équations du milieu ohmique, mais un peu plus compliqué
Pour communiquer depuis la Terre avec un satellite en orbite, les ondes électromagnétiques doivent traverser l'atmosphère. Celle-ci peut être assimilée au vide en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques, à l'exception d'une couche située entre 60 et 800 km : l'ionosphère.
Sous l'influence du rayonnement solaire, l'air présent dans l'ionosphère s'ionise et devient un plasma, contenant des cations (masse m_c et charge $+e$) et des électrons (masse m_e et charge $-e$) avec une même densité volumique n. Ces charges sont soumises à l'action de l'onde électromagnétique.
On considère une onde transverse de la forme $\overrightarrow{\underline{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \overrightarrow{e_x}$, et on cherche à déterminer son devenir quand elle pénètre dans l'ionosphère.

1. Dans quelle direction se propage cette onde ? Quelle est sa polarisation ? Exprimer le champ magnétique associé dans le vide.
2. Exprimer la force de Lorentz subie par une charge q en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}$. À quelle condition sur v est-il possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique ? On suppose cette condition remplie par la suite.
3. On note respectivement $\overrightarrow{v_c}$ et $\overrightarrow{v_e}$ les vitesses des cations et des électrons. Partant du principe fondamental de la dynamique, montrer que $\dfrac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} = ne^2 \left(\dfrac{1}{m_e} + \dfrac{1}{m_c} \right) \overrightarrow{E}$
4. Rappeler l'ordre de grandeur de la masse d'un proton, en déduire celle de la masse d'un cation. Comparer à la masse d'un électron. En déduire une simplification de l'expression précédente.
5. Montrer que le champ électrique vérifie l'équation de propagation suivante (appelée équation de Klein-Gordon) $\Delta \overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \dfrac{\omega_P^2}{c^2} \overrightarrow{E}$, avec ω_P une pulsation caractéristique appelée pulsation plasma, à exprimer en fonction des données du problème.
6. Établir la relation de dispersion du plasma.
7. Exprimer le champ électrique de l'onde si $\omega < \omega_p$. On introduira une longueur caractéristique δ. L'onde peut-elle traverser l'ionosphère ? Qu'en est-il si $\omega > \omega_p$?
8. Les satellites GPS émettent dans deux étroites bandes de fréquences centrées sur 1227 MHz et 1575 MHz. Commenter ce choix sachant que la pulsation plasma de l'ionosphère est de l'ordre de 1.10^7 rad/s.

Exercices pour aller plus loin ⋆⋆⋆

Exercice 6 - Approche énergétique de l'effet de peau

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\overrightarrow{\underline{E}} = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \overrightarrow{u_x}$$

1. S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?
2. Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ associé.

3. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.
4. Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur dz. Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.
5. Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.
6. À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Exercice 7 - Réflexion de la lumière sur un métal réel

Considérons une onde électromagnétique provenant de $-\infty$ de la forme $\overrightarrow{\underline{E_i}} = E_0 \exp(j(\omega t - kz))\overrightarrow{e_x}$ et arrivant en $z = 0$ sur un métal de conductivité $\sigma \simeq 5,7.10^7$ S/m (non considéré comme infini).
Cette onde donne naissance à :

- ▷ une onde réfléchie (se propageant selon $-\overrightarrow{e_z}$ dans l'espace $z < 0$) de la forme $\overrightarrow{\underline{E_r}} = \underline{r}E_0 \exp(i(\omega t + kz))\overrightarrow{e_x}$;
- ▷ une onde transmise (se propageant selon $+\overrightarrow{e_z}$ dans l'espace $z > 0$) de la forme $\overrightarrow{\underline{E_t}} = \underline{t}E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k_t}z))\overrightarrow{e_x}$ avec $\underline{k_t} = \dfrac{1-j}{\delta}$ ($\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$ est l'épaisseur de peau)

1. Déterminer les champs magnétiques complexes associées à cette onde. On posera $\alpha = \sqrt{\dfrac{2\omega\epsilon_0}{\gamma}}$.
2. Comme le modèle adopté ici est réaliste (métal réel), il n'y a pas de courant surfacique. Traduire les relations de passage des champs.
3. En déduire l'expression de $\underline{r}$ et $\underline{t}$. Vers quelles valeurs tendent-ils dans le cas d'un conducteur parfait ?
4. Calculer α pour une fréquence hertzienne $f \simeq 320$ MHz et en déduire l'expression appochée, au premier ordre en α du coefficient de réflexion $\underline{r}$ (sous la forme $a + ib$). Quel est alors le déphasage de l'onde réfléchie sur l'onde incidente ? Montrer que tout se passe comme si l'onde incidente faisait un aller-retour dans le métal à la célérité dans le vide sur une profondeur z_P à déterminer. Interpréter.
5. Calculer les trois vecteurs de Poynting moyens en $z = 0$, puis définir et exprimer en fonction de α (sans le supposer petit) les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Établir et expliquer la relation simple entre R et T. Montrer que l'expression approchée de T, compte tenu du fait que $\alpha \ll 1$, s'exprime très facilement en fonction de α. A.N. pour $f \simeq 320$ MHz. Commenter.